Л 7. Понятие функции одной переменной. Предел последовательности и функции. Теоремы о пределах функций. Понятия непрерывности функций. Точки разрыва функции

Цель лекции: сформировать у студентов базовые представления о функции одной переменной, числовых последовательностях, пределе функции и последовательности, основных теоремах о пределах и понятии непрерывности функции. Научить определять точки разрыва и классифицировать их.

Основные вопросы

- Определение функции одной переменной. Область определения и область значений.
- Числовые последовательности и их предел.
- Предел функции: определения и геометрический смысл.
- Односторонние пределы и связь между ними.
- Теоремы о пределах функций и последовательностей.
- Бесконечно малые и бесконечно большие функции.
- Замечательные пределы
- Непрерывность функции в точке и на отрезке.
- Типы точек разрыва: устранимые разрывы, разрывы I и II рода.
- Теоремы Больцано–Коши и Вейерштрасса о свойствах непрерывных функций.

Краткое содержание: в лекции вводится понятие функции одной переменной, числовых последовательностей и их пределов. Рассматриваются пределы функций, односторонние пределы, основные теоремы о пределах, бесконечно малые и бесконечно большие функции. Изучаются непрерывность функции, виды точек разрыва и фундаментальные свойства непрерывных функций на отрезке.

Определение. Множеством называется совокупность, собрание каких-либо объектов произвольной природы. Объекты, входящие в данное множество, будем называть элементами множества.

Запись $a \in A$ означает, что объект a есть элемент множества A (принадлежит множеству A); в противном случае пишут $a \in A$ (или $a \bar{\in} A$). Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым и обозначается символом $\varnothing$. Запись $A \subset B$ (A содержится в B) означает, что каждый элемент множества A является элементом множества B, в этом случае множество A называется подмножеством множества B. Множества A и B называются равными $(A = B)$, если $A \subset B$ и $B \subset A$, другими словами, множества считаются равными, если они состоят из одних и тех же элементов.

Символика математической логики. Для сокращения записи в дальнейшем будем употреблять некоторые основные логические символы, или кванторы. Пусть α и β некоторые предложения.

1)Запись $\alpha \Rightarrow \beta$ означает: «из α следует β», «⇒» символ импликации.

2) Запись $\alpha \Rightarrow \beta$ означает «α и β эквивалентны» т.е. что, из $\alpha \Rightarrow \beta$ и из $\beta \Rightarrow a$. «⇔»– символ эквивалентности.

Любую теорему в математике можно записать в виде $\alpha \Rightarrow \beta$ или в виде $\alpha \Leftrightarrow \beta$, α – условия теоремы, а β – ее утверждение.

3) Знак «∀» означает: «каждый, любой, для каждого» и т. д. ∀– квантор общности. Например, $\forall x \in X \quad \alpha(x)$ означает: «для всякого элемента $x \in X$ истинно утверждение $\alpha(x)$».

4) Знак «∃» означает «существует, найдется, имеется». «∃»– квантор существования. ∃ - перевернутая E - начальная буква слова «Existenz» - «существует». Например, $\exists x \in X \quad \alpha(x)$ означает: существует элемент $x \in X$ такой, что для него истинно утверждение $\alpha(x)$. Если элемент x из X, для которого истинно утверждение $\alpha(x)$, не только существует, но и единствен, то пишут: $\exists x \in X \quad \alpha(x)$.

Отрезок, интервал, ограниченное множество. Введем следующие обозначения для подмножеств в R.

Множество чисел $x \in R,$ удовлетворяющих неравенствам $a \le x \le b,$ называется отрезком (с концами a,b) или сегментом и обозначается так:

$[a,b]$, т.е. $[a,b] = \{x \in R : a \le x \le b\}$.

Множество чисел $x \in R,$ удовлетворяющих неравенству $a < x < b,$ называется интервалом (с концами a,b) или открытом отрезком и обозначается так: a,b, т.е. $(a,b) = \{x \in R : a < x < b\}$.

Множество чисел $x \in R$, удовлетворяющих неравенствам $a \le x < b$ или $a < x \le b$, обозначаются соответственно $[a,b)$, $(a,b]$ и называются полуоткрытыми отрезками или полуинтервалами. Первый, например, закрыт слева и открыт справа.

Отрезки, интервалы и полуинтервалы называются числовыми промежутками или просто промежутками.

Произвольный интервал (a,b), содержащий точку x_0 мы будем называть окрестностью точки x_0. В частности, интервал $(x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$ называют ε - окрестностью точки x_0

$$U_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$

Часто рассматривают множества, называемые бесконечными интервалами или полуинтервалами: 1) $(-\infty,+\infty)$, 2)$(-\infty,a]$, 3)$(-\infty,a)$, 4)$(a,+\infty)$, 5)$[a,+\infty)$.

Первые их них есть множество всех действительных чисел (действительная прямая), остальные состоят их всех чисел, для которых соответственно: 2) $x \le a$, 3) $x < a$, 4) $a < x,$ 5) $a \le x$.

Если a и b конечны и $a<b,$ то число $b-a$ называется длиной сегмента $[a,b]$ или интервала (a,b), или полуинтервала $(a,b]$, $[a,b)$.

Пусть X есть произвольное множество действительных чисел.

Говорят, что множество X ограничено сверху, если $\exists$ (действительное), число M такое, что $\forall x \in X : x \le M$.

Ограничено снизу, если $\exists$ число т такое, что $\forall x \in X : x \ge m$.

Ограничено, если оно ограничено как сверху, так и снизу. В противном случае, оно называется неограниченным.

Ясно, что множество X ограничено, если $\exists M > 0 : \forall x \in X \Rightarrow |x| \le M$, так как $(|x| \le M) \Leftrightarrow (-M \le x \le M)$.

Неограниченное множество X можно определить так: множество X неограниченно $\Leftrightarrow \forall M > 0, \exists x_0 \in X : |x_0| > M$.

Область значений переменной величины. Множество всех значений переменной величины составляет ее область значений. Областью значений переменной часто бывает интервал.

Последовательности. Предположим, что все значения, принимаемые переменной величиной x, можно пронумеровать с помощью всевозможных натуральных (целых положительных) чисел: $x_1, x_2,..., x_n,...$ причем значение с большим номером принимается после значения с меньшим номером: если $n<m$, то значение x_n предшествует значению x_m, в частности x_n предшествует x_{n+1}. В этом случае говорят, что переменная x пробегает последовательность значений $x_1, x_2,..., x_n,...$ или что имеется последовательность (или числовая последовательность). Числа $x_1, x_2,..., x_n,...$ называются членами последовательности: x_1 - первый член, x_2, - второй и т.д. Число x_n с произвольным номером n называется общим членом последовательности. Последовательность определена, если мы знаем закон, по которому для любого номера n образован соответствующий член x_n последовательности. Иными словами, если мы знаем закон зависимости общего члена x_n от его номера n. Последовательность часто обозначают $\{x_n\}$ $(n = 1,2,...)$.

Определение. Функцией f с областью определения D и областью значений E называется некоторое отображение из D в E, т. е. соответствие, при котором каждому элементу $x \in D$ сопоставляется единственный элемент $y = f(x) \in E$.

Для того чтобы функция была определена, надо знать: а) область определения; б) закон соответствия. Обычно функция задается аналитически - какой-нибудь формулой. Иногда закон соответствия задается разными формулами на разных участках ее области определения.

Возрастание и убывание функций на интервале. Функция $f(x)$ называется возрастающей на некотором интервале, если для любых двух значений аргумента, взятых на этом интервале, большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

Функция $f(x)$ называется убывающей на некотором интервале, если для любых двух значений аргумента, взятых на этом интервале, большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Запишем эти определения с помощью логических символов - кванторов: для интервала $[a,b]$ $\forall x_1 x_2 \in [a,b]$ $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ - условие возрастания; $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ - условие убывания.

Интервал, на котором функция возрастает или убывает, называется интервалом монотонности этой функции, а про функцию говорят, что она монотонна на этом интервале.

Четные и нечетные функции. Пусть задана функция $y = f(x)$ с областью определения D. Функция $y = f(x)$ называется четной, если выполняется условие

$$f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D$$

функция $f(x)$ называется нечетной, если

$$f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in D$$

Период. Периодические функции. Число $l \neq 0$ называется периодом функции $f(x)$ с областью определения D, если

$$f(x+l) = f(x) \quad \forall x \in D$$

Функция $f(x)$, обладающая периодом, называется периодической. Условие предполагает, конечно, что наряду с любым $x \in D$ и $x + l \in D$.

Сложная функция (функция от функции). Пусть дана функция $y = f(x)$ от аргумента x, причем аргумент x, в свою очередь, является функцией от независимой переменной t: $y = f(x)$.

Возьмем какое-либо значение t. В силу функциональной зависимости x от t этому значению t отвечает определенное значение $x : x = \varphi(t)$. Полученному значению x, в свою очередь, отвечает определенное значение y: $y = f(x)$.

Получаем $y = F(t) = f(\varphi(t))$. Функция $F(t)$ называется сложной функцией от независимой переменной t или функцией от функции (функция f от функции φ). При этом функция $y = f(x)$ называется заданной или внешней функцией, а $x = \varphi(t)$- промежуточным аргументом. Функции f и φ называют еще составляющими для сложной функции F; говорят также, что F является суперпозицией функций f и φ. Чтобы образовать функцию от функции, нужно, чтобы область значений промежуточной переменной $x = \varphi(t)$ «укладывалась» в область определения заданной функции $y = f(x)$. В противном случае среди значений функции $x = \varphi(t)$ будут и такие, от которых значение функции $f(x)$ образовать нельзя. В таких случаях сложную функцию (или функцию от функции) можно задать только для тех значений независимой переменной t, для которых значения промежуточной переменной $x = \varphi(t)$ попадают в область определения внешней функции $y = f(x)$.

Обратная функция. Пусть на некотором интервале X задана функция $y = f(x)$, область значений которой обозначим Y. Согласно определению функции каждому значению $x \in X$ соответствует определенное значение $y = f(x)$, $y \in Y$. Если же интервал X является интервалом монотонности для $f(x)$, то и каждому значению $y \in Y$ отвечает одно вполне определенное значение $x \in X$, для которого $y = f(x)$ (рис.20). Таким образом, в этом случае функциональная зависимость между X и Y может рассматриваться и как функция $x = \varphi(y)$, т.е. y можно рассматривать как аргумент, а x - как функцию. У функции $x = \varphi(y)$ областью определения является Y, а областью значений - X. Функции $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ называются взаимно обратными $x = \varphi(y)$ обратная функция к функции $y = f(x)$; $y = f(x)$ - обратная функция к функции $x = \varphi(y)$. Уравнение $x = \varphi(y)$ получается в результате разрешения, если это возможно, уравнения $y = f(x)$ относительно переменной x.

Если f и φ - взаимно обратные функции, то имеют место тождества

$$f(\varphi(y)) \equiv y; \ \ \varphi(f(x)) \equiv x.$$

Графиком функции $x = \varphi(y)$ является та же линия, которая изображала функцию $y = f(x)$: ведь уравнение $x = \varphi(y)$ - просто иначе переписанное уравнение $y = f(x)$.

Неявные функции. Иногда функциональная зависимость величин y и x задается некоторым уравнением, связывающим x и y, но нерешенным ни относительно y, ни относительно x т.е. $F(x, y) = 0$.

Параметрическое задание функции. Кривые на плоскости часто задаются параметрическими уравнениями. В этих уравнениях координаты x и y точки на кривой выражены как функции третьего, вспомогательного переменного t (параметра), как правило $t \in R$.

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \phi(t) \end{cases}$$

Это новый, иногда наиболее удобный, способ задать функциональную зависимость между x и y. Считаем, что функция $x = \varphi(y)$ имеет обратную: $t = \hat{O}(x)$. [т.е. решаем уравнение $x = \varphi(y)$ относительно t]. Поставив это во второе уравнение, получим:

$$y = \phi(\hat{O}(x)) = f(x)$$

т.е. y есть функция от x (сложная функция).

Переменная величина x стремится к пределу a (a - постоянное число), если абсолютная величина $|x - a|$ разности между x и a становится в процессе изменения переменной величины сколь угодно малой.

То же самое определение можно сказать и другими словами.

Пределы

Определение. Постоянное число a называется **пределом переменной величины** x, если $|x - a|$ - абсолютная величина разности между x и a

становится в процессе изменения переменной величины x сколь угодно малой.

Тот факт, что число a, является пределом переменной величины, записывается следующим образом: $a = \lim x$ ($\lim$ - первые буквы слова limes - предел) или $x \to a$.

Уточним, что следует понимать под словами «величина $|x-a|$ становится сколь угодно малой», имеющимися в определении предела. Зададимся произвольным положительным числом $\varepsilon(\varepsilon > 0)$, тогда, если, начиная с некоторого момента в изменении переменной величины x, значения $|x-a|$ сделаются, и будут становиться меньше, чем это $\varepsilon : |x-a| < \varepsilon$.

Переменная величина x стремится к пределу a, если для любого положительного ε. начиная с некоторого момента в изменении переменной x, выполняется неравенство $|x-a| < \varepsilon$.

Определение предела имеет простой геометрический смысл: неравенство $|x-a| < \varepsilon$ означает, что x находится в ε - окрестности точки a, т.е. в интервале $(a-\varepsilon;\ a+\varepsilon)$. Таким образом, определение предела в геометрической форме: число a является пределом переменной величины x, если для любой (произвольно малой) ε - окрестности точки a можно указать такой момент в изменении переменной x начиная с которого все ее значения попадают в указанную ε - окрестность точки a.

Определение. Числовой последовательностью называется действительная функция натурального аргумента, т. е. функция, у которой $D = N$ и $E \subset R$.

Она обозначается символом $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $n \in N$, или короче, $\{x_n\}$. Число x_n, зависящее от n, называется n-ым членом последовательности. Расставив значения последовательности по порядку номеров, получаем, что последовательность можно отождествить со счетным набором действительных чисел, т. е. $\{x_n\} = \{x_1, x_2, x_3, ...\} = \{x_n : n \in N\}$.

Определение. Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся число n_0, что все числа x_n, у которых $n \ge n_0$, удовлетворяют неравенству $|x_n - a| < \varepsilon$.

Соответствующее обозначение $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n \overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0) : (\forall n \ge n_0) \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon .$$

Неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ можно также записывать в виде $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ или $x_n \in U_z(a)$. В этих записях подчеркнуто, что величина x_n становится сколь угодно мало отличимой от a, когда номер члена n неограниченно возрастает. Геометрически определение предела последовательности означает следующее: для сколь угодно малой ε-окрестности числа a найдется такой номер N, что все члены последовательности с большими, чем N, номерами попадают в эту окрестность, вне окрестности оказывается лишь конечное число начальных членов последовательности. Это все или некоторые из членов $x_1, x_2, ..., x_N$. Число N в нашем определении зависит от $\varepsilon : N = N(\varepsilon)$. Как говорилось ранее, определение предела следует понимать в развитии, в динамике, в движении: если мы возьмем другое, меньшее значение для ε, например $\varepsilon_1 < \varepsilon$ то найдется, вообще говоря, другой номер $N_x > N$, такой, что неравенство $|x_n - a| < \varepsilon_1$, выполняется при всех $n > N_1$. Будем записывать определение предела с помощью логических символов (кванторов). Определение предела последовательности с помощью кванторов выглядит так:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N) = N(\varepsilon) : \ \forall n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

Дадим определения пределов функции при

$x \to a, \ x \to a-, \ x \to a+, \ x \to +\infty, \ x \to -\infty, \ x \to \infty.$

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a, кроме, быть может, этой точки.

Определение. Число A называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to a$, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся такое δ>0, что для всех $x \in U_\xi(a) \setminus \{a\}$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, т. е.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta) > 0 : (\forall x \in U_\delta(a) \setminus \{a\}) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon .$$

(Обозначается $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ при $(x \to a)$.

Определение. Число А называется пределом слева функции $y = f(x)$ при $x \to a$, если $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) : (\forall x \in (a - \delta, a)) \Rightarrow |f(x) - A| < \delta$. (Обозначается $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = A$ или $f(a-0) = A$).

Определение. Число А называется пределом справа функции $y = f(x)$ при $x \to a$, если $(\forall \varepsilon > 0 \ ) (\exists \delta > 0)(\forall x \in (a, a+\delta)) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.

Обозначается: $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = A$ или $f(a+0) = A$).

Теорема. $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ существует в том и только в том случае, когда существуют пределы $\lim\limits_{x\to a-} f(x), \lim\limits_{x\to a+} f(x)$, и они равны между собой.

Определение. Число А называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, если для каждого ε>0 найдётся такое число N, что при любом $x > N$ выполняется $|f(x) - A| < \varepsilon$, т. е. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N) : (\forall x > N) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$. (Обозначается $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = A$).

Определение. Число А называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to -\infty$, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N : (\forall x : x < -N) \Rightarrow (|f(x) - A| < \varepsilon)$. (Обозначается $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = A)$.

Определение. Число А называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to \infty$, если $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N) : (\forall x : |x| > N) \Rightarrow (|f(x) - A| < \varepsilon)$. (Обозначается $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$).

Последнее определение подразумевает, что $y = f(x)$ определена в некотором интервале $(\mathrm{N},+\infty)$, пятое определение подразумевает, что она определена в интервале $(-\infty, -N)$, а из шестого определения следует, что она определена при $x > N$ и $x < -N$, т. е. в промежутках $(-\infty,-\mathrm{N}) \cup (\mathrm{N},+\infty)$.

Теорема. Предел $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ существует в том и только в том случае, когда существуют $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ и они равны между собой.

Свойства функций и последовательностей, имеющих предел. Рассматриваемые ниже свойства справедливы для всех видов пределов функций и пределов последовательности. Однако для краткости будем формулировать их для одного предела (при $x \to a$).

1) Предел постоянной функции (или последовательности) равен этой постоянной, т.е.

$$\lim_{x \to a} C = C .$$

2) Если предел функции (последовательности) существует, то он единствен.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется ограниченной сверху в промежутке Δ, если найдется такое число C, что для всех x, принадлежащих Δ, $f(x) \le C$. Если $f(x) \ge C \forall x \in \Delta$, то такая функция называется ограниченной снизу в Δ.

Функция, ограниченная сверху и снизу в Δ, называется ограниченной в Δ. Если Δ не упоминается, то подразумевается, что $\Delta = R$.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной (сверху, снизу), если найдётся такое C, что для всех $n \in \mathrm{N}$, $-C \le x_n \le C$, (или $x_n \le C$, или $x_n \ge -C$).

Определение. Функция $y = f(x)$ называется неубывающей (возрастающей) в интервале (a, b), если для любых $x_1 < x_2$ из этого интервала выполняется неравенство $f(x_1) \le f(x_2)$ $(f(x_1) < f(x_2))$. Если $\forall x_1, x_2 : x_1 < x_2$, имеет место $f(x_1) \ge f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$, то такая функция называется невозрастающей (убывающей) в (a, b). Такие функции называют монотонными на $(a; b)$.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется неубывающей (невозрастающей), если для любых $n_1 < n_2, n_1, n_2 \in \mathrm{N}$ выполняется $x_{n_1} \le x_{n_2} (x_{n_1} \ge x_{n_2})$.

Теорема. Пусть функция монотонно возрастает (убывает) на интервале (a, b) и ограничена сверху (снизу) на этом интервале числом C, тогда существует

$$\lim_{x \to b-0} f(x) = C \quad \left(\lim_{x \to a+0} f(x) = A\right) \text{ и } \quad A \le C (A \ge C) .$$

Здесь число b может быть равным $+\infty$, тогда рассматривается $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Если последовательность $\{x_n\}$ монотонно возрастает (убывает) и ограничена сверху (снизу), то существует $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = A$ и число C, что $A \le C$ $(A \ge C)$.

Аналогичное утверждение можно сформулировать для $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Теорема. Пусть в некоторой окрестности точки a, кроме этой точки, для функций $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = h(x)$ выполняется соотношение $f(x) \le g(x) \le h(x)$ и пусть пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} h(x)$ существуют и равны между собой, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = A$. Тогда $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ также существует и равен A.

Определение. Функция $y = \alpha(x)$ называется **бесконечно малой** (б.м.) при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$ или $(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0) : (\forall x \in U_\delta(a) \setminus \{a\}) \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon$.

Теорема 1. Пусть $\alpha_1(x), \alpha_2(x), ..., \alpha_n(x)$ - б.м. при $x \to a$, тогда их сумма $\alpha(x) = \alpha_1(x) + \cdots + \alpha_n(x)$, также является б.м. при $x \to a$.

Теорема 2. Пусть $\alpha(x)$ б.м. при $x \to a$, а $f(x)$ ограничена в некоторой окрестности точки a, тогда $\alpha(x) \cdot f(x)$ является б.м. при $x \to a$.

Теорема 3. Предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ равен числу A в том и только в том случае, когда $(f(x) - A)$ является б.м. при $x \to a$.

Основные теоремы о пределах. Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ - функции, для которых существуют пределы при $x \to a$ (или при $x \to \infty$): $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$. Сформулируем основные теоремы о пределах.

1. Функция не может иметь более одного предела.
2. Предел алгебраической суммы, то тогда $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x))$ существует и равен $A \pm B$.
3. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$ существуют, то тогда $\lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot g(x)$ существует и равен $A \cdot B$.
4. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$ и $B \ne 0$ существуют, то тогда $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ существует и равен $\dfrac{A}{B}$.

Первый замечательный предел. Второй замечательный предел

Первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Доказательство. Пусть $x\to 0+$ и $0<x<\frac{\pi}{2}$. Рассмотрим круг единичного радиуса с центральным углом $<AOB=x$. Из рис.34 непосредственно видно: $OA=OB=1, BC=tgx$. $S_{\Delta AOB}<S$ сектора $AOB<S_{\Delta OB}$.

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin x<\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot x<\frac{1}{2}\cdot 1\cdot tgx\Rightarrow \sin x<x<tgx\Rightarrow \frac{\cos x}{\sin x}<\frac{1}{x}<\frac{1}{\sin x}\Rightarrow \cos x<\frac{\sin x}{x}<1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0<1-\frac{\sin x}{x}<1-\cos x\Rightarrow \left|1-\frac{\sin x}{x}\right|<2\sin^2\frac{x}{2}<2\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2\to 0$$

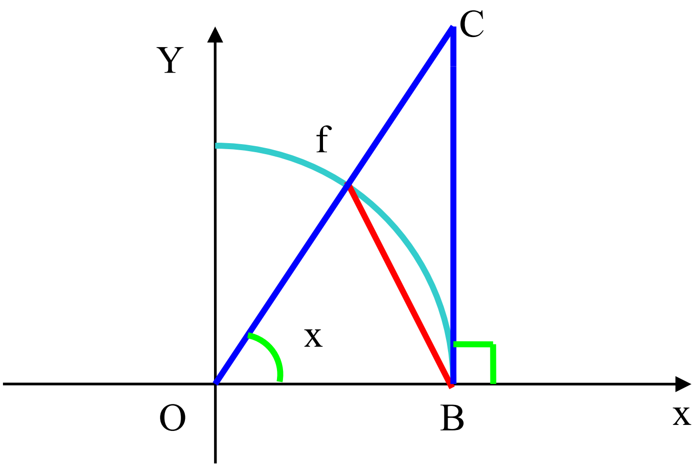
$$1-\frac{\sin x}{x}=\alpha(x)\Rightarrow \frac{\sin x}{x}=1-\alpha(x)\Rightarrow \lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Так как функция $y=\frac{\sin x}{x}$ чётная, то

$\lim\limits_{x\to 0-}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0-}\frac{\sin(-x)}{(-x)}=|-x=y|=\lim\limits_{y\to 0+}\frac{\sin y}{y}=1$. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0-}\frac{\sin x}{x}=1$.

Пример.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2x}{\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{1\cdot 2x}{1\cdot 3x}=\frac{2}{3}$$



Следствия из первого замечательного предела: а) $\lim\limits_{x\to 0} tg=1$; б) $\lim\limits_{x\to 0} arc\ \sin x=1$.

Второй замечательный предел

$$\text{а) }\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e,\qquad \text{б) }\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e,\qquad \text{в) }\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

Здесь e ≈ 2,718282… – иррациональное число. Эта последовательность $\{x_n\}$ обладает двумя свойствами:

а) Она монотонно возрастает, так как в x_{n+1} на одно слагаемое больше, и каждое слагаемое в x_{n+1} больше соответствующего слагаемого в $\{x_n\}$.

б) $\mathrm{x_n} < 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!} < 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{n-1}} = 2+\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} < 3$, т.е. x_n ограничена сверху числом 3. Следовательно, по свойству 4 пределов $2 < \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{x_n} < 3$.

Пример. Вычислим предел, следствия из первого замечательного предела

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x+3}\right)^{3x+2} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x+1}{2x+3}-1\right)^{3x+2} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x+1-2x-3}{2x+3}\right)^{3x+2} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{2x+3}\right)^{3x+2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-2}{2x+3}\right)^{\frac{2x+3}{-2}}\right]^{\frac{-2}{2x+3}(3x+2)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-6x-4}{2x+3}} = e^{-3}.$$

Непрерывность. Сравнение функций. Вычисление пределов функций

Определение. Функция $y = F(x)$ называется бесконечно большой (б.б.) при x→ a, если

$$(\forall \mathrm{N} > 0)(\exists \delta > 0): (\forall \mathrm{x} \in \mathrm{U}_\delta(\mathrm{a}) \setminus \{\mathrm{a}\}) \Rightarrow |\mathrm{F(x)}| \geq \mathrm{N}.$$

Это обозначается символом $\lim\limits_{x\to a} F(x) = \infty$ или $F(x) \to \infty$ $(x \to a)$, хотя предел этой функций при $x \to a$ не существует.

Отметим следующие свойства б.б. функций.

1) Сумма двух б.б. одного знака при $x \to a$ является б.б. при $x \to a$.

2) Сумма б.б. функции при $x \to a$ и ограниченной в окрестности точки a функции является б.б. при $x \to a$.

3) Если $y = F(x)$ б.б. при $x \to a$, а $|g(x)| \geq C > 0$ в некоторой окрестности точки a, то функция $y = F(x)\cdot g(x)$ является б. б. при $x \to a$. В частности, произведение двух б.б. и произведение б. б. на функцию, имеющую ненулевой предел, является б.б.

4) Если $y = F(x)$ б.б. при $x \to a$, то $y = \frac{1}{F(x)}$ б.м. при $x \to a$.

5) Если $y = \alpha(x)$ б.м. при $x \to a$ и $\alpha(x) \neq 0$ при $\forall x \in \frac{U_\delta(a)}{\{a\}}$, то $y = \frac{1}{\alpha(x)}$ является б.б. при $x \to a$.

Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших

Определение. Бесконечно малая $y = \alpha(x)$ называется б.м. высшего порядка малости по сравнению с б.м. $y = \beta(x)$ при $x \to a$ в случае, если найдётся б.м. $y = \gamma(x)$ при $x \to a$ такая, что $\alpha(x) = \beta(x)\cdot\gamma(x)$. Соответствующее обозначение $\alpha(x) = o(\beta(x))$.

Определение. Бесконечно малые $y=\alpha(x)$ и $y=\beta(x)$ при $x \to a$ называются эквивалентными, если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$. Обозначение $\alpha(x) \sim \beta(x)$. Подобное определение даётся и для б.б. функции.

Это отношение эквивалентности удовлетворяет трём свойствам

1. $\alpha(x) \sim \alpha(x)$;
2. $\alpha(x) \sim \beta(x) \Rightarrow (\beta(x) \sim \alpha(x))$;
3. Если $\alpha(x) \sim \beta(x)$ и $\beta(x) \sim y(x)$, то $\alpha(x) \sim y(x)$.

Теорема. Из $\alpha(x) \sim \beta(x)$ следует, что $\alpha(x) \sim \beta(x) = o(\beta(x))$

Теорема. Пусть $\alpha(x)$ есть б.м. при $x \to a$, тогда:

1	$\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$	5	$\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)$
2	$\mathrm{tg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$	6	$b^{\alpha(x)}-1 \sim \alpha(x)\cdot\ln b$, $(b>0)$
3	$\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x)$	7	$(1+\alpha(x))^a-1 \sim a\cdot\alpha(x)$
4	$arctg\alpha(x) \sim \alpha(x)$		

Непрерывность функции

Определение. Функция $y=f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если выполняются три условия:

1) существует $f(x_0)$; 2) существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$; 3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

В символической форме это определение записывается так:

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0):(\forall x\in U_\delta(x)) \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

Функция $y=f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 слева (справа), если выполняются три условия:

1) $\exists\ f(x_0)$;

2) $\exists \lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$ $\left(\text{или} \lim\limits_{x\to x_0+} f(x)\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)=f(x_0)$ при $\left(\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)=f(x_0)\right)$.

Очевидно, что функция является непрерывной в точке x_0 в том и только в том случае, когда она непрерывна в этой точке слева и справа.

График непрерывной функции представляет из себя непрерывную линию.

Теорема (о непрерывности монотонной функции). Пусть функция $y=f(x)$ монотонна (монотонно возрастает или монотонно убывает) на отрезке $[a,\ b]$ и принимает все значения из отрезка $[f(a),f(b)]$, тогда она непрерывна в каждой точке интервала (a,b), непрерывна в точке a справа и в точке b слева.

Теорема. Пусть функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ непрерывны в точке x_0. Тогда функции

1) $y=f(x)\pm g(x)$

2) $y=f(x)\cdot g(x)$,

3) при $g(x_0)\neq 0,\ \ y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$. также непрерывны в точке x_0.

Теорема (непрерывность сложной функции). Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $u_0=f(x_0)$, а функция $z=g(u)$ непрерывна в точке u_0. Тогда сложная функция $z=g(f(x))$ непрерывна в точке x_0.

Определение. Точка x_0, в которой нарушается хотя бы одно условие непрерывности функции $y=f(x)$, называется точкой разрыва этой функции.

Рассмотрим точку разрыва x_0 функции $y=f(x)$, в некоторой окрестности которой (кроме быть может x_0) эта функция определена. Возможны три случая:

1. Если $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $f(x_0)$ не определена или $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$, то x_0 называется точкой устранимого разрыва. Если эту функцию изменить в точке x_0, т.е. пожить

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x), & x\neq x_0,\\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x), & x=x_0,\end{cases}$$

то функция $y=\tilde{f}(x)$ будет непрерывной в точке x_0, т. е. этот разрыв устраняется.

2. Если $\exists \lim\limits_{x\to x_{0-}} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_{0+}} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, то точка x_0 называется точкой разрыва первого рода функции $y=f(x)$.

3. Если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$ не существует или равен бесконечности, то точка x_0 называется точкой разрыва второго рода функции $y=f(x)$.

Свойства функций, непрерывных на отрезке

Определение. Функция $y=f(x)$ называется непрерывной на отрезке $[a,b]$, если она непрерывна во всех точках интервала (a,b), непрерывна в точке a справа и в точке b слева.

Обозначение $f(x)\in C[a,b]$.

Первая теорема Больцано-Коши. Пусть $f(x)\in C[a,b]$ и принимает на его концах значения разных знаков (т. е. $f(a)\cdot f(b)<0$), тогда найдется по крайней мере одна точка с в интервале (a,b) такая, что $f(c)=0$

Это даёт алгоритм приближенного решения уравнения $f(x)=0$, который называется методом половинного деления.

Вторая теорема Больцано-Коши. Пусть $f(x)\in C[a,b]$, $f(a)=A$, $f(b)=B$, $D\in(A,B)$ ($[A,B]$), тогда $\exists\xi\in(a,b): f(\xi)=D$. Эту теорему можно сформулировать и так: непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ принимает все промежуточные значения между $f(a)$ и $f(b)$.

Первая теорема Вейерштрасса. Если $f(x)\in C[a,b]$., то она ограничена на этом отрезке, т. е. $\exists M: |f(x)|\leq M,\ x\in[a,b]$.

Определение. Наибольшим значением функции $y = f(x)$ в промежутке Δ называется такое значение $f(x_0)$, $x_0 \in \Delta$, при котором $f(x_0) \geq f(x)$ для всех $x \in \Delta$ (обозначение $\max\limits_{x \in \Delta} f(x)$). Аналогично вводится понятие наименьшего значения функции в Δ (обозначение $\min\limits_{x \in \Delta} f(x)$).

Вторая теорема Вейерштрасса. Функция $y = f(x) \in C[a, b]$ достигает в нём своих наибольшего и наименьшего значений.

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое функция одной переменной и как задаётся её область определения?
2. Дайте определение числовой последовательности.
3. Что называется пределом последовательности?
4. Как формулируется определение предела функции при $x \to a$?
5. Что означают пределы слева и справа функции?
6. Когда существует $\lim_{x \to a} f(x)$?
7. Сформулируйте основные свойства пределов функций.
8. Что называют бесконечно малой и бесконечно большой функцией?
9. Запишите первый замечательный предел.
10. Запишите любой вариант из второго замечательного предела.
11. Что значит, что функция непрерывна в точке?
12. Назовите три типа точек разрыва и дайте краткие определения.
13. Сформулируйте первую теорему Больцано–Коши.
14. Сформулируйте теорему о достижении наибольшего и наименьшего значения (Вейерштрасса).

Литература

1. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа, 2005. Т.1. Т.2.
2. Демидович Сборник задач по математическому анализу
3. Махмеджанов Н., Махмеджанова Р.Н. Сборник задач по высшей математике. Алматы: «Қазақ Университеті», 2021.